Probabilità e Statistica

Stima puntuale di parametri

Marco Pietro Longhi

C.d.L.: Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni, Ingegneria Informatica
a.s. 2018/2019

Esercizi

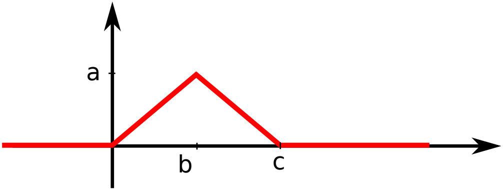
Esercizio

[Tratto dal tema d'esame del 05/07/2016-C6]
Si consideri per $\vartheta > 0$ la funzione definita da

$$f(x;\vartheta) = \begin{cases} \frac{4}{\vartheta^2}x & \text{se } 0 \le x \le \frac{\vartheta}{2} \\ \frac{4}{\vartheta^2}\cdot(\vartheta - x) & \text{se } \frac{\vartheta}{2} < x \le \vartheta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1. Verificare che per ogni $\vartheta > 0$, $f(\cdot;\vartheta)$ rappresenta una funzione di densità di probabilità.
2. Sia $X_1, X_2, \cdots, X_n$ un campione casuale estratto dalla popolazione di densità $f(\cdot,\vartheta)$, stabilire se $T = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ è uno stimatore corretto di ϑ.

Proof
Disegniamo il grafico della funzione di densità di probabilità data



1. Risulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;\vartheta)\,dx = \frac{1}{2}\vartheta\frac{2}{\vartheta} = 1$$

quindi $f(\cdot;\vartheta)$ rappresenta una funzione di densità di probabilità per ogni $\vartheta > 0$

1. T è uno stimatore **corretto** o **non distorto** di ϑ se $E[T] = \vartheta$.

   Nel nostro caso $E[X] = \frac{1}{2}\vartheta$ e

$$E[T] = E\left[\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] =$$

$$= \frac{2}{n}\cdot nE[X_i] = \frac{2}{n}n\frac{1}{2}\vartheta = \vartheta \Longrightarrow \text{lo stimatore è corretto}$$

Esercizio

Sia X la variabile casuale di Poisson di parametro λ,

1. determinare uno stimatore con il metodo dei momenti;
2. verificare la correttezza dello stimatore trovato;
3. calcolare l'errore quadratico medio;
4. supponendo poi di avere i seguenti dati campionati

   $$2,\ 3,\ 2,\ 4,\ 3,\ 5,\ 4,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 4,\ 2,\ 3,\ 4,\ 3,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 4,\ 3,\ 3,\ 4$$

   calcolare il valore stimato di λ.

Proof

X ha funzione di densità di probabilità

$$f_X(x;\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & \text{se } x \in N \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Determiniamo uno stimatore **con il metodo dei momenti.**

Ricordiamo che con

$$M'_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r, \quad \mu'_r = E\left[X^r\right]$$

si indica, rispettivamente, il momento campionario assoluto di ordine r e il momento di ordine r della variabile casuale X. Il metodo dei momenti consiste nel risolvere il sistema nelle incognite $\vartheta_1, \cdots, \vartheta_k$ di k, numero dei parametri incogniti, equazioni

$$\begin{cases} \mu'_1 & = & M'_1 \\ \mu'_2 & = & M'_2 \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ \mu'_k & = & M'_k \end{cases}$$

Nel nostro caso abbiamo solo un parametro da stimare, λ, quindi calcoliamo

$$\mu_1' = E[X] = \lambda, \text{ e } M_1' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Posto $\mu_1' = M_1'$, risulta $\overline{\Lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Per determinare se lo stimatore è non distorto calcoliamo

$$E\left[\widehat{\Lambda}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\right] = E\left[\overline{X}_n\right] = \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}nE[X] = E[X]$$

Essendo X v.c. di Poisson di parametro λ, si ha $E[X] = \lambda$, quindi

$$E\left[\widehat{\Lambda}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\right] = \lambda \Longrightarrow \widehat{\Lambda} \text{ stimatore non distorto}$$

Chiamiamo **errore quadratico medio** di uno stimatore $T = t\left(X_1, \cdots, X_2\right)$, la funzione di ϑ data da:

$$\mathrm{MSE}\left[T\right]\left(\vartheta\right) := E\left[\left(T - \tau(\vartheta)\right)^2\right]$$

con $\tau(\vartheta)$ funzione del parametro da stimare. Ma

$$\mathrm{MSE}\left[T\right]\left(\vartheta\right) := \mathrm{var}\left[T\right] + \left[D\left[T\right]\left(\vartheta\right)\right]^2, \quad D\left[T\right]\left(\vartheta\right) := \tau(\vartheta) - E\left[T\right]$$

Nel nostro caso $E\left[\widehat{\Lambda}\right] = \lambda \Longrightarrow D\left[\widehat{\Lambda}\right] = 0$, quindi

$$MSE\left[\widehat{\Lambda}\right] = \mathrm{var}\left[\widehat{\Lambda}\right] = \mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] \underbrace{=}_{X_i\ ind.} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}\left[X_i\right] = \frac{1}{n^2}\cdot n\lambda = \frac{\lambda}{n}$$

Troviamo λ mediante i dati campionari

$$\widehat{\lambda} = \frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 2}{24} = \frac{77}{24} \approx 3,2083$$

Esercizio

Sia $X_1, \ X_2 \ \ldots X_n$ un campione casuale di ampiezza n estratto da una popolazione con distribuzione uniforme nell'intervallo $[a-b, a+b]$. Determinare gli stimatori di a e b con il metodo dei momenti.

Proof

L'intervallo ha ampiezza $a+b-(a-b)=2b$, ne segue che la funzione di densità di probabilità della v.c. X è

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{2b} & \text{se } a-b \leq x \leq a+b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Per determinare gli stimatori di $a, \ b$ con il metodo dei momenti, bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} \mu_1' & = & M_1' \\ \mu_2' & = & M_2' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mu_1' & = & \overline{X}_n \\ \mu_2' & = & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$$

Calcoliamo $\mu_1' = \frac{a+b+a-b}{2} = a$ e

$$\mu_2' = \operatorname{var}[X] + (\mu_1')^2 = \frac{[(a+b)-(a-b)]^2}{12} + a^2 = \frac{b^2}{3} + a^2$$

Sostituendo

$$\begin{cases} a = \overline{X}_n \\ \frac{b^2}{3} + a^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$$

ed eseguendo alcuni passaggi algebrici, ne segue che gli stimatori cercati sono

$$\widehat{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ \text{ e } \ \widehat{b} = \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{3}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}$$

Esercizio

[Tratto dal tema d'esame del 29/08/2016-C6]
Si supponga che X_1 , X_2, X_3 sia un campione casuale di ampiezza 3 estratto da una distribuzione esponenziale di media λ. Si considerino i seguenti stimatori del parametro λ:

$$\Lambda_1 = X_1, \ \Lambda_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}, \ \Lambda_3 = \frac{X_1 + 2X_2}{3}, \ \Lambda_4 = \overline{X}_3$$

1. Indicare quali sono gli stimatori non distorti di λ.
2. Individuare tra gli stimatori non distorti quello con MSE minimo.

Proof

Sia X una v.c. esponenziale di media λ, si ha

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0 & \quad\quad \text{altrove} \end{cases}$$

con $E[X] = \lambda$ e $\operatorname{var}[X] = \lambda^2$.

Calcoliamo il valore atteso degli stimatori dati

$$E[\Lambda_1] = E[X_1] = \lambda$$

$$E[\Lambda_2] = E\left[\frac{X_1 + X_2}{2}\right] = \frac{1}{2}(E[X_1] + E[X_2]) = \frac{1}{2} \cdot 2\lambda = \lambda$$

$$E[\Lambda_3] = E\left[\frac{X_1 + 2X_2}{3}\right] = \frac{1}{3}(E[X_1] + 2E[X_2]) = \frac{1}{3} \cdot (\lambda + 2\lambda) = \lambda$$

$$E[\Lambda_4] = E\left[\overline{X}_3\right] = \lambda$$

Tutti gli stimatori dati sono non distorti, per individuare il preferibile, calcoliamo la varianza di ciascuno:

$$\operatorname{var}[\Lambda_1] = \operatorname{var}[X_1] = \lambda^2$$

$$\operatorname{var}[\Lambda_2] = \operatorname{var}\left[\frac{X_1 + X_2}{2}\right] = \frac{1}{4}\left(\operatorname{var}[X_1] + \operatorname{var}[X_2] + 2\operatorname{cov}[X_1, X_2]\right) =$$

$= \frac{1}{4} \cdot 2\lambda^2 = \frac{1}{2}\lambda^2$ (X_1 e X_2 sono indipendenti)

$$\operatorname{var}[\Lambda_3] = \operatorname{var}\left[\frac{X_1 + 2X_2}{3}\right] = \frac{1}{9}\left(\operatorname{var}[X_1] + 4\operatorname{var}[X_2]\right) = \frac{1}{9}\cdot\left(\lambda^2 + 4\lambda^2\right) = \frac{5}{9}\lambda$$

$$\operatorname{var}[\Lambda_4] = \operatorname{var}\left[\overline{X}_3\right] = \frac{1}{3}\lambda^2$$

Lo stimatore non distorto con varianza minima è la media campionaria.

Esercizio

Il numero di interruzioni (crash) di un personal computer segue una distribuzione di Poisson di parametro λ. Sia $X_1, X_2 \dots X_n$ un campione casuale di ampiezza n estratto dalla distribuzione di Poisson data. Se il costo di riparazione è dato da

$$Y_n = 3\overline{X}_n + \overline{X}_n^{\,2}$$

dove $\overline{X}_n$ è la media campionaria su n crash, calcolare $E[Y_\infty]$.

Proof

Sia X una v.c. di Poisson di parametro λ, si ha

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & \text{se} \quad x = 0, 1, 2, 3 \dots \\ 0 & \quad\quad \text{altrove} \end{cases}$$

con $E[X] = \lambda$ e $\mathrm{var}[X] = \lambda$.

Calcoliamo il valore atteso dello stimatore dato

$$E\left[Y_n\right] = E\left[3\overline{X}_n + \overline{X}_n^2\right] = 3E\left[\overline{X}_n\right] + E\left[\overline{X}_n^2\right] = 3\lambda + E\left[\overline{X}_n^2\right]$$

Ma

$$E\left[\overline{X}_n^2\right] - E\left[\overline{X}_n\right]^2 = \operatorname{var}\left[\overline{X}_n\right], \quad \operatorname{var}\left[\overline{X}_n\right] = \frac{\operatorname{var}\left[X\right]}{n} = \frac{\lambda}{n},$$

quindi

$$E\left[Y_n\right] = 3\lambda + \frac{\lambda}{n} + \lambda^2$$

e passando al limite per $n \longrightarrow \infty$ si ha

$$E\left[Y_\infty\right] = 3\lambda + \lambda^2$$

Esercizio

Per un corso la prova d'accertamento del profitto è costituita da una batteria di 30 quesiti con risposta dicotomica. Si può ipotizzare che chi risponde a caso ad un quesito abbia probabilità $\frac{1}{2}$ di indovinare la risposta esatta. Supponiamo che ogni risposta esatta sia valutata $\frac{1}{30}$, si dica qual è per una persona perfettamente ignorante:

1. la probabilità di ottenere la sufficienza in una prova d'esame;
2. il numero medio di prove necessarie per superare l'esame.

Sia X la variabile casuale che conteggia il numero di risposte esatte in una prova. È ragionevole pensare che $X = S + I$ dove S indica la variabile casuale che conteggia il numero dei quesiti di cui il candidato sa la risposta esatta, mentre I è la variabile casuale che conteggia il numero di risposte indovinate. Sia S la v.c. binomiale di parametri $n = 30$ e p e sia $I/S = s$ la v.c. binomiale di parametri $n = 30 - s$ e $p = \frac{1}{2}$.

- Si determini la funzione di densità di probabilità congiunta di S e I, $p_{S,I}(s,i)$.
- Si mostri che $p_X(x) = \sum_{s=0}^{x} p_{S,I}(s, x-s)$ con $x = 0, \cdots, 30$ e dunque X è una variabile casuale binomiale di parametri $n = 30$ e $\frac{1+p}{2}$.
- Si determini uno stimatore non distorto di p.

Proof

Per ipotesi X è la v.c. che conteggia il numero di risposte esatte, ha distribuzione $Bi\left(30, \frac{1}{2}\right)$ con

$$p_X(x) = \binom{30}{x} p^x (1-p)^{30-x} \quad x = 0, \cdots, 30$$

Nel caso ricerchiamo la probabilità di ottenere appena la sufficienza si ha

$$\overline{p} = p_X(18) = \begin{pmatrix} 30 \\ 18 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{18} \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \approx 0.08055$$

Se invece vogliamo almeno la sufficienza, dobbiamo calcolare $P[X \geq 18]$. Dato che

$$\begin{cases} np = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15 \geq 5 \\ nq = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15 \geq 5 \end{cases} \Longrightarrow X \text{ ha distribuzione appr. } N\left(15, \frac{15}{2}\right)$$

Quindi $P[X \geq 18] = P[X \geq 17.5] \approx 0.18066 = \widetilde{p}$ con l'interpolazione, facendo invece "'la media aritmetica"' $\widetilde{p} = 0.1801$.

T denota il numero di prove di 30 domande ciascuna. Quando si avrà il superamento della prova con esattamente la sufficienza T è una v.c. di Pascal di parametro $\overline{p} = 0.08055$, quindi $E[T] = \frac{1}{\overline{p}} \approx 12.41465$, per passare la prova con esattamente la sufficienza bisogna fare mediamente l'esame dalle 12 alle 13 volte.
Se invece si avrà il superamento della prova con almeno la sufficienza T è una v.c. di Pascal di parametro

$$\begin{cases} \widetilde{p} = 0.18066 \Longrightarrow E[T] \approx 5.53526 \\ \\ \widetilde{p} = 0.1801 \Longrightarrow E[T] \approx 5.55247 \end{cases}$$

Sia $0 \le s \le 30$ e $0 \le i \le 30 - s$ allora

$$p_{S,I}(s,i) = \binom{30}{s} p^s (1-p)^{30-s} \cdot \binom{30-s}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{30-s-i} =$$

$$= \binom{30}{s} \cdot \binom{30-s}{i} p^s \left[\frac{1}{2}(1-p)\right]^{30-s}$$

Scelto $0 \le s \le 30$ e $0 \le i \le 30 - s$ risulta

$$p_X(x) = \sum_{(s,i):\ s+i=x} p_{S,I}(s,i) = \sum_{(s,i):\ i=x-s} p_{S,I}(s, x-s) =$$

$$= \sum_{s=0}^{x} \binom{30}{x} \cdot \binom{x}{s} p^s \left[\frac{1-p}{2}\right]^{30-s} =$$

$$= \binom{30}{s} \cdot \left(\frac{1-p}{2}\right)^{30-x} \sum_{s=0}^{x} \binom{x}{s} p^s \left(\frac{1-p}{2}\right)^{x-s}.$$

Ricordando il binomio di Newton

$$\sum_{s=0}^{x} \binom{x}{s} p^s \left(\frac{1-p}{2}\right)^{x-s} = \left(\frac{1+p}{2}\right)^x$$

si ha

$$p_X(x) = \binom{30}{x} \left(\frac{1-p}{2}\right)^{(30-x)} \left(\frac{1+p}{2}\right)^x,$$

con $x = 0, 1, \ldots, 30$. Pertanto X è una binomiale di parametri 30 e $\frac{1+p}{2}$, di media

$$E[X] = 30 \cdot \frac{1+p}{2} = 15(1+p).$$

Determiniamo, inoltre, uno stimatore di p con il metodo dei momenti:

$$\overline{X}_n = 15(1+p) \Longrightarrow \widehat{p} = \frac{\overline{X}_n}{15} - 1 \quad \text{stimatore di } \; p \; .$$

Calcoliamo $E\left[\widehat{p}\right]$

$$E\left[\widehat{p}\right] = \frac{1}{15} \cdot 15(1+p) - 1 = p,$$

quindi $\widehat{p}$ è corretto.

Esercizio

$X_1, X_2 \ldots X_n$ un campione casuale proveniente da una distribuzione rettangolare nell'intervallo $[0, 2\vartheta]$ con $\vartheta > 0$.

1. Si determini lo stimatore di ϑ con il metodo dei momenti.
2. Si verifichi se tale stimatore è consistente.

Proof

L'intervallo ha ampiezza $2\vartheta - 0 = 2\vartheta$, ne segue che la funzione di densità di probabilità della v.c. rettangolare X è

$$f(x; \vartheta) = \begin{cases} \frac{1}{2\vartheta} & \text{se } 0 \leq x \leq 2\vartheta \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Per determinare lo stimatore di ϑ con il metodo dei momenti, bisogna risolvere l'equazione

$$\mu_1' = M_1' \Longrightarrow \mu_1' = \overline{X}_n,$$

rispetto a ϑ.

Calcoliamo $\mu_1' = \frac{0+2\vartheta}{2} = \vartheta$, sostituendo nell'equazione precedente risulta $\overline{X}_n$ uno stimatore di ϑ. Essendo $E\left[\overline{X}_n\right] = \vartheta$, lo stimatore è non distorto.
Calcoliamo

$$\mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] \underbrace{=}_{X_i \text{ indip.}} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}\left[X_i\right] = \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\frac{\vartheta^2}{3} = \frac{\vartheta^2}{3n}.$$

Ne segue

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} E\left[\left(\overline{X}_n - \vartheta\right)^2\right] = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{\vartheta^2}{3n} = 0,$$

quindi lo stimatore è consistente.

Esercizio (Tema d'esame del 10/01/2006 - E2)

Sia $X_1, \ X_2 \ \ldots X_n$ un campione casuale di ampiezza n estratto da una popolazione con densità di probabilità

$$f_X(x, \vartheta) = \begin{cases} \frac{2}{\vartheta}\left(1 - \frac{x}{\vartheta}\right) & \text{se } 0 \le x \le \vartheta \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

con $\vartheta > 0$.

1. Determinare uno stimatore T di ϑ con il metodo dei momenti.
2. Stabilire se T è distorto e calcolarne l'errore quadratico medio.

Proof

Individuiamo lo stimatore T del parametro ϑ, risolvendo rispetto a ϑ

$$\overline{X}_n = E[X].$$

Calcoliamo

$$E[X] = \int_0^{\vartheta} \frac{2}{\vartheta} x \left(1 - \frac{x}{\vartheta}\right) dx = \frac{1}{3}\vartheta$$

quindi

$$\overline{X}_n = \frac{1}{3}\vartheta \Longrightarrow T = 3\overline{X}_n.$$

Lo stimatore è non distorto, infatti, $E\left[3\overline{X}_n\right] = 3E\left[\overline{X}_n\right] = 3\frac{\vartheta}{3} = \vartheta$

Calcoliamo, infine, l'errore quadratico medio

$$\mathrm{MSE}[T] = \mathrm{var}[T] = \mathrm{var}\left[3\overline{X}_n\right] = 9\frac{\mathrm{var}[X]}{n}.$$

$$E\left[X^2\right] = \int_0^{\vartheta} \frac{2}{\vartheta} x^2 \left(1 - \frac{x}{\vartheta}\right) dx = \frac{\vartheta^2}{6} \Longrightarrow \mathrm{var}[X] = \frac{\vartheta^2}{6} - \frac{\vartheta^2}{9} = \frac{\vartheta^2}{18}.$$

Ne segue $\mathrm{MSE}[T] = \frac{\vartheta^2}{2n}$.

Esercizio (Tratto dal tema d'esame del 12/01/2016-C6 e Tema d'esame del 13/06/2018 - C8)

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale, di dimensione n, estratto da una distribuzione rettangolare uniforme sull'intervallo $[a, 2a]$.

1. Determinare uno stimatore T_1 di a con il metodo dei momenti. Verificare se lo stimatore T_1 è distorto e calcolarne l'errore quadratico medio $MSE[T_1]$.
2. Considerato poi lo stimatore $T_2 = \dfrac{1}{2}X_1 + \dfrac{1}{6}X_2$, verificare se T_2 è distorto e calcolarne l'errore quadratico medio $MSE[T_2]$.
3. Supposto $n = 3$, quale dei due stimatori T_1 e T_2 di a è preferibile (giustificare la risposta)?

$$\begin{bmatrix} T_1 = \frac{2}{3}\overline{X}_n \\ T_1 \text{ non distorto} \\ MSE[T_1] = \frac{a^2}{27n} \\ T_2 \text{ non distorto} \\ MSE[T_2] = \frac{5a^2}{216} \\ T_1 \text{ preferibile} \end{bmatrix}$$

Esercizio

[Tratto dal Tema d'esame del 04/07/2006 - E1 e Tema d'esame del 27/08/2018 - C8]

Sia $X_1, \ldots, X_8$ un campione aleatorio, di dimensione 8, estratto da una distribuzione rettangolare uniforme sull'intervallo $[-1, b]$, con $b > -1$.

Si chiede:

1. determinare uno stimatore T_1 di b con il metodo dei momenti;
2. determinare se lo stimatore T_1 sia distorto;
3. calcolare l'errore quadratico medio $\mathrm{MSE}[T_1]$;
4. considerato poi lo stimatore $T_2 = 4\overline{X}_8 - X_3 - X_5 + 1$, calcolarne l'errore quadratico medio $\mathrm{MSE}[T_2]$;
5. determinare quale dei due stimatori T_1 e T_2 di b sia preferibile, giustificando la risposta.

$$\left[\begin{array}{l} T_1 = 2\overline{X}_n + 1 \\ T_1 \text{ non distorto} \\ MSE[T_1] = \frac{(b+1)^2}{24} \\ MSE[T_2] = \frac{(b+1)^2}{3} \\ T_1 \text{ preferibile} \end{array}\right]$$

Esercizio

Sia X una variabile casuale normale con media μ e varianza σ^2. Siano X_1, X_2, X_3 le variabili casuali indipendenti descritte dalle tre determinazioni x_1, x_2, x_3 di un campione casuale estratto da essa. Per stimare il parametro μ si considerano i due seguenti stimatori:

$$\overline{X}_3 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}, \quad T = \frac{1}{5}X_1 + \frac{1}{5}X_2 + \frac{3}{5}X_3 .$$

1. Dire se $\overline{X}_3$ e T sono stimatori non distorti di μ e motivare la risposta.
2. Calcolare $\mathrm{MSE}[\overline{X}_3]$ e $\mathrm{MSE}[T]$ e stabilire quale tra i due stimatori $\overline{X}_3$ e T di μ sia preferibile, motivando la risposta.

$$\left[\begin{array}{l} \overline{X}_3 \text{ non distorto} \\ T \text{ non distorto} \\ MSE[\overline{X}_3] = \frac{\sigma^2}{3} \\ MSE[T] = \frac{11\sigma^2}{25} \\ \overline{X}_3 \text{ preferibile} \end{array}\right]$$

Esercizio

[2° Test d'esame del 13/06/2018 - C5]
Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale di ampiezza n, estratto da una distribuzione continua uniforme nell'intervallo $[a-2, 2a+3]$ con $a > 1$. Determinare uno stimatore di a con il metodo dei momenti.

$$\left[T = \frac{2\overline{X}_n - 1}{3} \right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 23/06/2014 - C3]
Sia $X_1, ..., X_n$, $n \geq 2$, un campione casuale estratto dalla funzione di densità di probabilità

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{3}{4\theta\sqrt{2\theta}}\sqrt{x} & 0 < x < 2\theta, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

$\theta > 0$. Determinare uno stimatore T di θ con il metodo dei momenti.

$$\left[T = \frac{5}{6}\overline{X}_n\right]$$

Esercizio

[Tema d'esame del 15/01/2019 - C7]
Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione casuale di ampiezza n estratto da una popolazione distribuita con densità di probabilità

$$f_X(x, \theta) = \begin{cases} 8^{-\theta}\,\theta\,x^{\theta-1} & \text{se } 0 < x < 8, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

con $\theta \in R^+$. Si determini lo stimatore $\hat{\theta}$ del parametro θ con il metodo dei momenti.

$$\left[\hat{\theta} = \frac{\bar{X}_n}{8 - \bar{X}_n}\right]$$